МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Сибирский государственный университет геосистем и технологий»

Кафедра высшей математики

ПРЕДЕЛЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

для обучающихся на 1 курсе всех направлений обучения в СГУГиТ

Учебно-методическое пособие составил:

доцент кафедры высшей математики Мартынов Геннадий Павлович,

Новосибирск, 2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»
(СГУГиТ)

Г.П. Мартынов

ПРЕДЕЛЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

для обучающихся на 1 курсе всех направлений обучения

Новосибирск

СГУГиТ

2019

УДК 517

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор, НГТУ,
Костюченко В.Я.

Мартынов, Г.П.
М 294 Пределы в примерах и задачах, учебно-методическое пособие. / Г.П. Мартынов, – Новосибирск: СГУГиТ, 2019. – 27 с.

Учебно-методическое пособие составлено сотрудником кафедры высшей математики Сибирского государственного университета геосистем и технологий: доцентом Г.П. Мартыновым. Пособие предназначено для обучающихся на 1 курсе всех специальностей и направлений обучения в СГУГиТ. Оно содержит краткую теорию (определения, формулы и теоремы) раздела «Пределы и непрерывность», примеры решения типовых задач, типовые задания по 30 вариантам, вопросы для повторения по данной теме и библиографический список рекомендуемой литературы.

УДК 517

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Предел последовательности. Предел функции на бесконечности и в точке

Вводное слово. Понятие предела функции играет фундаментальную роль во всём математическом анализе. Первое корректное определение предела числовой функции было дано известным французским математиком О. Коши в 1821 г. Символ ***lim***, употребляемый в обозначении предела, составляется из первых трёх букв латинского слова ***limes*** (французского ***limite***), обозначающего «предел».

Определение 1.1. Рассмотрим функцию $y_n = f(n)$, где n – натуральное число. Значения. принимаемые функцией $f(n)$, образуют, как говорят, последовательность: y_1, y_2, y_3, ..., y_n, y_{n+1}, ... Более точно: п*оследовательностью* называется множество чисел, перенумерованных с помощью натуральных чисел и расположенных в порядке возрастания номеров.

Определение 1.2. *Число A* называется *пределом последовательности*

$y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...,\ y_n,\ y_{n+1},\ ...$, если для любого сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа ε существует номер M, такой, что при всех $n > M \Rightarrow |\,y_n - A\,| < \varepsilon$. А записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Например. Члены геометрической прогрессии:
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ..., \frac{1}{2^n}, ...;\ y_n = f(n) = \frac{1}{2^n}$, стремятся к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$), потому что: $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, тем самым для любого сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа ε мы нашли номер M, такой, что: при всех $n > M \Rightarrow |\,y_n - 0\,| < \varepsilon$ ($M = 1 + E(\log_2(1/\varepsilon)$, где $E(x)$ – целая часть x).

Рассмотрим теперь функцию $y = f(x)$ непрерывного аргумента x и введем сначала понятие предела. Поставим следующую задачу: в течение дня наполняемость станций метрополитена является функцией времени. Пусть x – это время, тогда $f(x)$ – это количество пассажиров на перроне данной станции метрополитена. Чем ближе будет подходить время к «часу пик», тем больше будет пассажиров на перроне, тем больше становится потребность в поездах метро, тем меньше должен быть интервал движения метро. Получается, что чем точнее мы будем знать истинное (предельное) значение x_0 «часа пик» – тем точнее будем знать истинное (предельное) количество А пассажиров на станций – тем меньше времени будут терять люди на ожидание транспорта.

Определение 1.3. *Число A есть предел функции* $f(x), x \in D,$ при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \in D,$ удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, будет справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

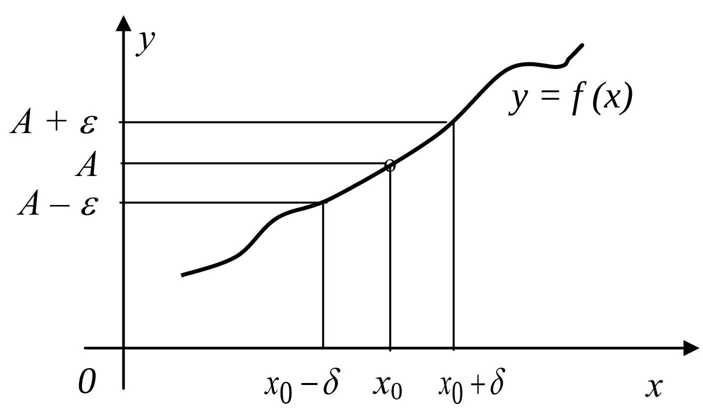


Рис. 1.1

Точка x_0, к которой стремится независимая переменная x**,** называется *предельной точкой*. Мы пишем: $x \to x_0$, т. е. точка x стремится к точке x_0; это означает, что мы придаем значения x, сколь угодно приближающиеся к x_0, но не равные x_0 (вообще говоря). Функция $y = f(x)$ может быть и не определена в предельной точке; достаточно, чтобы функция была определена в какой-нибудь δ-окрестности этой точки.

Геометрическая иллюстрация наличия у функции $f(x)$ предела при $x \to x_0$ дана на рис. 1.1.

Если функция имеет предел, то только один, ибо значения функции для значений аргумента, приближающихся к предельной точке, должны быть как угодно близки к какому–то постоянному числу и, следовательно, не могут быть одновременно близки к двум разным постоянным числам.

Например. Если $f(x) = C$, для всех x, где C – постоянная, то разность $|C - C| = 0$ и, значит, меньше любого наперед заданного положительного числа ε. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

Определение 1.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена на полуинтервале $[a; +\infty)$. *Число A* называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа ε существует число *M*, такое, что для всех $x > M \Rightarrow | f(x) - A | < \varepsilon$. А записывается это так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to +\infty.$$

Геометрический смысл предела функции при $x \to +\infty$ иллюстрируют следующие графики на рис. 1.2 – 1.4:

1. Функция $y = f_1(x)$ приближается к своему пределу *A*, возрастая, при $x \to +\infty$ (рис. 1.2).

2. Функция $y = f_2(x)$ при $x \to +\infty$ приближается к пределу *A*, убывая (рис. 1.3).

3. Функция $y = f_3(x)$ при $x \to +\infty$ приближается к пределу, колеблясь (рис. 1.4).

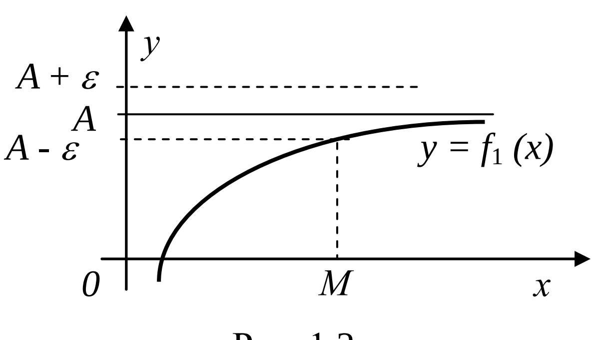


Рис. 1.2

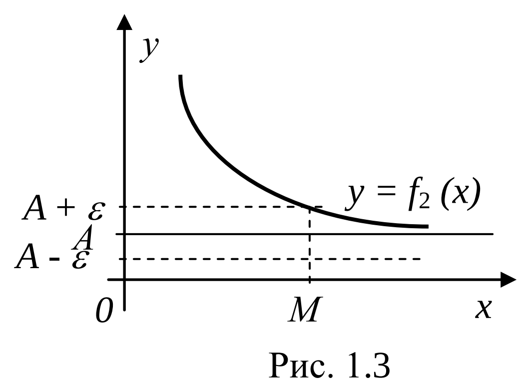


Рис. 1.3

Определение и геометрический смысл предела функции при $x \to -\infty$ совершенно аналогичны.

Определение 1.5. Пусть функция $y = f(x)$ определена на области D ($D = (-\infty; a] \cup [b; \infty), a \le b$). *Число A* называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа ε существует число M, такое, что при всех $|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. А записывается это так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

На рис. 1.5 приведена геометрическая иллюстрация предела при $x \to \infty$ (здесь M есть максимальное из двух положительных чисел M_1 и M_2).

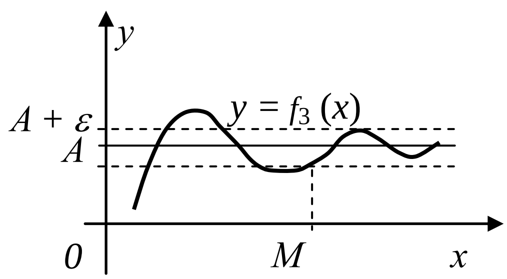


Рис. 1.4

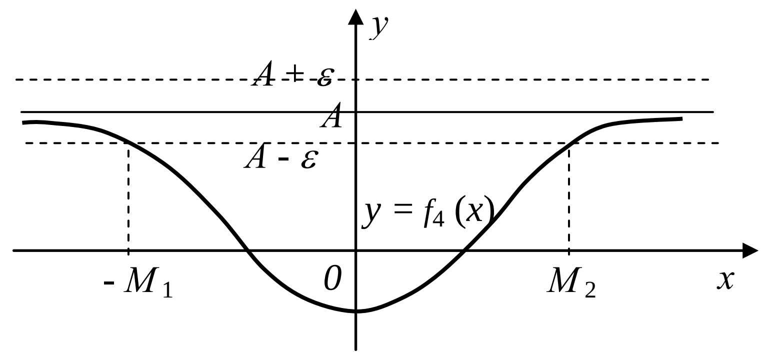


Рис. 1.5

2. Бесконечно большие и бесконечно малые. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших

В разделе 1 предел определялся как некоторое конечное число A ($A \ne \infty$), однако можно дать определение бесконечного предела – в этом случае возникает понятие бесконечно большой величины.

Определение 2.1. Функция $y = f(x), x \in D,$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно большого положительного числа M всегда существует положительное число δ, такое что для всех $x \in D$, удовлетворяющих двойному неравенству: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$. В этом случае говорят, что «предел модуля функции $f(x)$ при $x \to x_0$ бесконечен», а записывается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Определение 2.2. Функция $f(x)$ *ограничена на области D*, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$, для всех $x \in D$.

Определение 2.3. Функция $y = f(x), x \in D,$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые величины при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$ и при $x \to \pm\infty$.

Эти величины играют очень важную роль в математическом анализе. Между ними существует простая связь, которую мы сформулируем в виде теоремы 4.2.

Теорема 2.1. Если $f(x)$ – бесконечно большая величина при $x \to x_0$, то $1/f(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to x_0$; если $f(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to x_0$, то $1/f(x)$ – бесконечно большая величина при $x \to x_0$.

Замечание. Аналогичная связь существует между бесконечно малыми и бесконечно большими при $x \to \infty$.

Например. Функция $f(x)=x^2$ при $x \to 0$ – бесконечно малая величина; а функция $f(x)=x^{-2}$ при $x \to 0$ – бесконечно большая величина.

Теорема 2.2. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые величины при $x \to x_0$, $m(x)$ и $n(x)$ – бесконечно большие при $x \to x_0$, то

1. сумма бесконечно малых $(\alpha(x) + \beta(x))$ тоже является бесконечно малой при $x \to x_0$;

2. разность бесконечно малых $(\alpha(x) - \beta(x))$ тоже является бесконечно малой при $x \to x_0$;

3. произведение бесконечно малых $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ также является бесконечно малой при $x \to x_0$;

4. произведение $C\cdot\alpha(x)$ бесконечно малой на постоянную также является бесконечно малой при $x \to x_0$;

5. произведение $m(x)\cdot n(x)$ двух бесконечно больших есть бесконечно большая при $x \to x_0$;

6. произведение $C\cdot m(x), C\neq 0,$ бесконечно большой на постоянную также является бесконечно большой при $x \to x_0$;

7. сумма $C+m(x)$ постоянной и бесконечно большой также является бесконечно большой при $x \to x_0$;

8. если $\gamma(x)$ - ограничена на некотором интервале, содержащем точку x_0, то $\dfrac{\gamma(x)}{m(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$;

Замечание. В данной теореме 2.2 вместо x_0 может быть ∞. Данная теорема может быть использована при доказательстве теорем о пределах (см. п. 3).

Определение 2.4. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\Delta x = x - x_0$ – бесконечно малые величины при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, то величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются:

а) *эквивалентными* бесконечно малыми при $x \to x_0$, если k =1;

б) бесконечно малыми *одного порядка малости* при $x \to x_0$, если $k \neq 1$ *и* $k \neq 0$;

в) если же $k = 0$, то говорят, что бесконечно малая величина $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

г) если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{(\Delta x)^p} = k \neq 0, p > 0,$ p – вещественное число, то говорят , что бесконечно малая $\alpha(x)$ имеет порядок малости, равный p, по сравнению с бесконечно малой Δx при $x \to x_0$.

д) если же не существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми.

Например. $\alpha(x) = x \cdot \sin(1/x)$ и $\beta(x) = x$ - несравнимые бесконечно малые при $x \to 0$.

Замечание. Таблица эквивалентных бесконечно малых при $x \to 0$ будет приведена в разделе 5.

3. Теоремы о пределах

Теорема 3.1 (основная теорема о пределах). Существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ эквивалентно существованию такой δ-окрестности точки x_0, на которой имеет место следующее представление функции $y = f(x), x \in D,$ в виде:

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{3.1}$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство

1. Пусть существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогда по определению 1.3 для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, удовлетворяющих двойному неравенству: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Рассмотрим функцию $\alpha(x) = f(x) - A, x \in D,$ тогда для этой функции выполняется следующее: для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, удовлетворяющих двойному неравенству: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, что в соответствии с определением 1.5 означает, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Поэтому на этой δ-окрестности точки x_0 имеет место представление: $\alpha(x) = f(x) - A, x \in D,$ где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то есть справедливо (3.1), что и требовалось доказать.

2. Пусть существует δ-окрестность U_{x_o} точки x_0, на которой имеет место следующее представление функции $y = f(x), x \in D,$ в виде: $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Докажем, что существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Имеем: $f(x) - A = \alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$. По определению 2.3 бесконечно малой: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, а по определению 1.3 предела функции: для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_1 > 0$, что для всех $x \in D,\ x \in U_{x_o}$, удовлетворяющих двойному неравенству: $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x) - 0| < \varepsilon$. Подставляя в последнее, получим: $f(x) - A = \alpha(x)$, получаем: $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, что по определению 4.17 означает существование предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Теорема 3.1 доказана.

Далее с помощью основной теоремы 3.1 о пределах и с помощью свойств бесконечно малых доказываются все остальные теоремы о пределах.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тогда имеют место следующие теоремы о пределах.

Теорема 3.2 (о линейности предела).

$$\lim_{x \to x_0} [m \cdot f(x) + n \cdot g(x)] = m \cdot A + n \cdot B, \tag{3.2}$$

где m и n – произвольные числа.

Теорема 3.3 (о пределе произведения и частного).

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B, \tag{3.3}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ при } B \neq 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.4 (о предельном переходе в неравенстве).

Пусть $f(x) \leq g(x)$ для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0, тогда:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) = B. \tag{3.5}$$

Теорема 3.5 (о пределе промежуточной переменной).

Пусть в некоторой δ-окрестности точки x_0 имеет место неравенство: $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A. \tag{3.6}$$

Теорема 3.6 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел – число A при $x \to x_0$, то она ограничена в некотором интервале, содержащем точку x_0.

Определение 3.1. Последовательность $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...$ *ограничена сверху*, если $y_n < M$ для всех n**;** *ограничена снизу*, если $y_n > m$ для всех n*;* ограничена, если $|y_n| < k$ для всех n.

Укажем теорему как *признак существования предела последовательности*.

Теорема 3.7. Если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел.

Замечание. Предел последовательности может и не существовать. Например: последовательность $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...$, где $y_n = 1 + (-1)^n$, не имеет предела. Докажем это от противного. Пусть существует $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$, тогда по определению 1.2 для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует номер M, такой, что для всех $n > M \Rightarrow |\, y_n - A \,| < \varepsilon$. Поэтому, при $n_1 > M,\ n_2 > M \Rightarrow \left| \, y_{n_1} - y_{n_2} \, \right| < 2\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 0{,}1$, тогда существует номер M, такой, что $n_1 > M,\ n_2 > M \Rightarrow \left| \, y_{n_1} - y_{n_2} \, \right| < 0{,}2$. Возьмем $n_1 > M,\ n_2 > M$, где n_1 – четное число, а n_2 – нечетное число, тогда $y_{n_1} = 2,\ y_{n_2} = 0 \Rightarrow \left| \, y_{n_1} - y_{n_2} \, \right| = 2$, а должно быть: $\left| \, y_{n_1} - y_{n_2} \, \right| < 0{,}2$. Полученное противоречие указывает на отсутствие предела у данной последовательности.

Определение 3.2. Введём понятие одностороннего (*левого* и *правого*) предела функции. Будем писать: $x \to x_0 - 0$; «x стремится к x_0 слева», если $x \to x_0$ и $x < x_0$. Аналогично пишем: $x \to x_0 + 0$; «x стремится к x_0 справа», если $x \to x_0$ и $x > x_0$. Обозначим:

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – *предел функции* $f(x)$ *слева*;

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ – *предел функции* $f(x)$ *справа*.

Например: пусть функция $f(x)$ задана так: $f(x) = \begin{cases} x^2, & при\ x<0; \\ 2-x, & при\ x \ge 0; \end{cases}$, тогда, используя теоремы 3.2 и 3.3 о пределах, можно доказать:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to -0} x^2 = \lim_{x\to -0} x \cdot \lim_{x\to -0} x = 0\cdot 0 = 0, \text{ т. е. } f(-0)=0,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to +0} (2-x) = 2 - \lim_{x\to +0} x = 2-0=2, \text{ т. е. } f(+0)=2;$$

или геометрически на рис. 3.1.

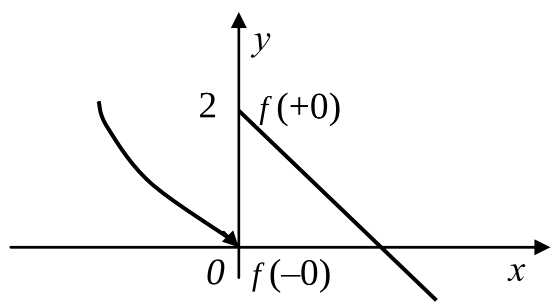


Рис.3.1

Теорема 3.8. Существование левого и правого пределов функции $f(x)$ в точке x_0 и их равенство – *необходимое и достаточное условие* существования предела функции в точке x_0; в этом случае:

$$A = A_- = A_+ \text{ (где } A_\pm = f(x_0 \pm 0)). \qquad (3.7)$$

4. Непрерывность функции, точки разрыва

Определение 4.1. Функция $f(x)$, $x \in D$, называется *непрерывной* в точке $x_0 \in D$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция $f(x)$, $x \in D$, называется *непрерывной* на области *D*, если она непрерывна в каждой точке $x_0 \in D$. Точка x_1 называется точкой разрыва функции $f(x)$, $x \in D$, если в этой точке функция не является непрерывной, причем в этом случае говорят, что функция имеет разрыв в точке x_1.

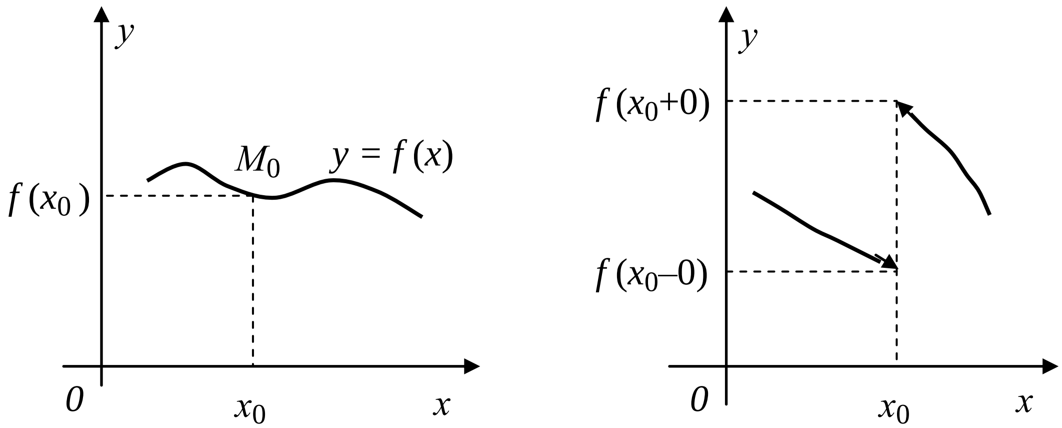
Графически же непрерывность функции $y = f(x)$ означает непрерывность её графика как линии на плоскости *Oxy*. А в точках разрыва график функции разрывается на части как линия на плоскости *Oxy*.

Имеет место следующая теорема (*критерий непрерывности*).

Теорема 4.1. Функция $f(x)$, $x \in D$, непрерывна в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда односторонние пределы в точке x_0 совпадают между собой и равны значению функции в этой точке:

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0), \qquad (4.1)$$

Как видно, например, из рис. 4.1, в точке x_0 разрыва функции $f(x)$ её левая «половина графика» не соединяется с «правой половиной», т. е. график «разорвался», а поэтому $f(x)$ в точке x_0 имеет разрыв.



(Функция непрерывна) (Функция имеет разрыв)

Рис. 4.1

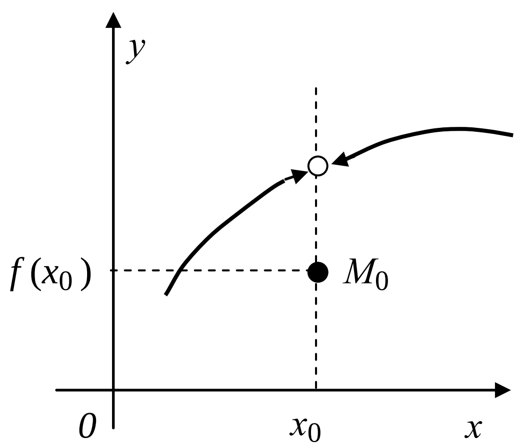


Рис. 4.2

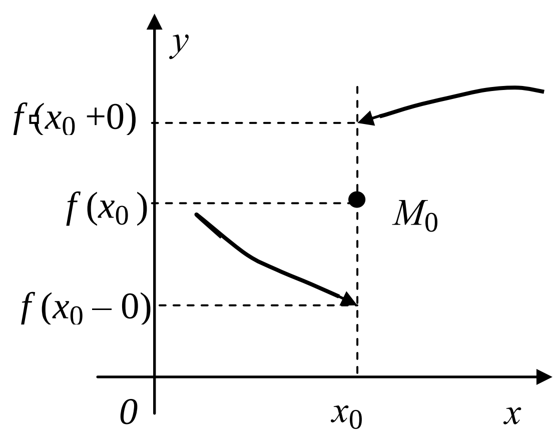


Рис. 4.3

Классификация точек разрыва

Определение 4.2. Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$**,** $x \in D$, тогда имеют место следующие типы разрывов:

1. Устранимый разрыв ***первого*** рода:
если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, либо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, а $f(x_0)$ не существует (например, как на рис. 4.2).

2. Неустранимый разрыв ***первого*** рода, если односторонние пределы существуют, но не равны: $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (например, как на рис. 4.3).

3. Разрыв ***второго*** рода, если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или бесконечен (например, как на рис. 4.4, 4.5 и 4.6).

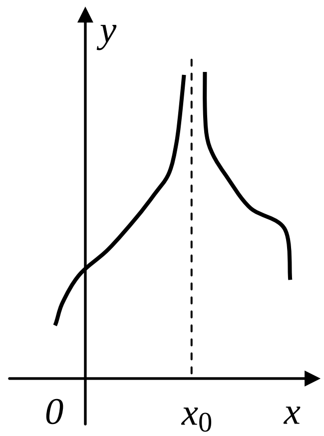


Рис. 4.4

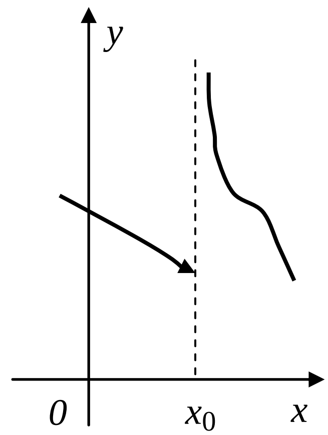


Рис. 4.5

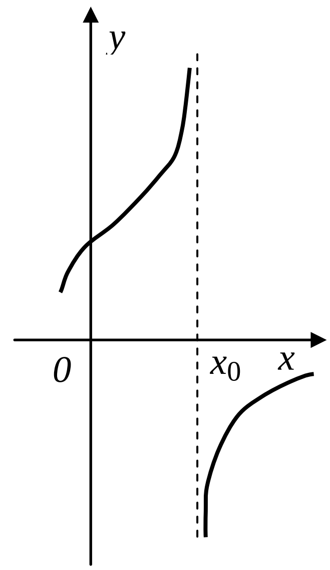


Рис. 4.6

Теорема 4.2. Пусть задана функция $y = f(x), x \in D,$ возьмем произвольный $x_o \in D$ и дадим ему бесконечно малое приращение Δx. Пусть Δx настолько мало, что $x_o + \Delta x = x \in D$. Тогда соответствующее приращению Δx приращение функции будет $\Delta y = f(x) - f(x_o)$. Если функция $y = f(x), x \in D,$ непрерывна в точке $x_o \in D$, то $\Delta y \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$.

Доказательство

Согласно определению 1.3 и теореме 3.1 имеем: существует такая δ-окрестность точки x_0, на которой имеет место следующее представление (4.3) функции: $f(x) = A + \alpha(x)$, где $A = f(x_o)$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда на этой δ-окрестности имеем:

$\Delta y = f(x) - f(x_o) = f(x_o) + \alpha(x) - f(x_o) = \alpha(x) \to 0$ *при* $x \to x_o$ (или, что равносильно, при $\Delta x \to 0$), поэтому $\Delta y \to 0$ *при* $\Delta x \to 0$, что и требовалось.

Теорема 4.14 (непрерывность сложной функции). Пусть функция $z = \varphi(y)$ определена в некоторой области *D*, а функция $y = f(x)$ определена для всех *x* в области *X*, при этом все $y = f(x)$ лежат в области *D*. То есть задана сложная функция $z = \varphi[f(x)]$, $x \in X$**.** Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_o \in X$, а функция $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_o \in D$, то и сложная функция $z = \varphi[f(x)]$ будет непрерывна в точке x_o.

Теорема 4.15. Все элементарные функции непрерывны на области своего определения.

Теорема 4.16. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на всём отрезке $[a;b]$, то 1) на этом отрезке функция достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений;
2) функция $y=f(x)$ принимает все промежуточные значения, то есть, если число A расположено между m и M ($m \le A \le M$), тогда обязательно найдётся хотя бы один x_0 на отрезке $[a;b]$, такой, что $f(x_o)=A$.

Образцы решения заданий по теме «Пределы и непрерывность»

Определение предела само по себе не даёт способов для его отыскания, ниже приводятся некоторые правила и способы, с помощью которых можно найти некоторые стандартные пределы, а затем можно находить пределы других функций.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то можно использовать определение 4.1: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ - и получить ответ. А если точка x_0 – точка разрыва функции $f(x)$, то возникают так называемые неопределенности. То есть неопределённости возникают при попытке подставить предельное значение аргумента x в функцию $f(x)$.

Основные неопределённости таковы: $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для «раскрытия» любых неопределённостей обычно сначала неосновные неопределённости: ($\{\infty \cdot 0\}, \{\infty - \infty\}, \ldots$) преобразованиями сводятся к основным неопределённостям, а затем они «подгоняются» под замечательные пределы, либо производятся алгебраические сокращения, либо для нахождения предела используется таблица эквивалентных бесконечно малых.

Замечание. Во всех неопределенностях в фигурных скобках понимается следующее: «0» – это бесконечно малая, «∞» – это бесконечно большая. Например: $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ - есть отношение двух бесконечно малых.

Имеют место два **замечательных предела**, которые часто используются, в том числе и при раскрытии неопределённостей:

Теорема 4.17. $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ – первый замечательный предел.

Замечание: этот стандартный предел обычно используется для раскрытия неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при наличии тригонометрических функций.

Теорема 4.18.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e, \\ \\ \lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e\approx 2{,}718281\ldots \end{array}\right\} \text{– второй замечательный предел.}$$

Замечание: этот стандартный предел обычно используется для раскрытия неопределенности вида $\left\{1^{\infty}\right\}$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $u\to 0$ эквивалентны следующие бесконечно малые величины:

sin $u \sim u$, arcsin $u \sim u$, tg $u \sim u$, arctg $u \sim u$,
ln $(1+u) \sim u$, $(e^{u}-1) \sim u$, $\{(1+u)^{m}-1\} \sim mu$.

Далее рассмотрим несколько примеров раскрытия неопределённостей.

Примеры. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-3n^2+5n+4}{4n^3+2n-3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ = [получена основная неопределённость] =

= [находим старшие степени в числителе, знаменателе и выносим за скобку] =

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{3n^2}{n^3}+\dfrac{5n}{n^3}+\dfrac{4}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(\dfrac{4n^3}{n^3}+\dfrac{2n}{n^3}-\dfrac{3}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}{4+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}=\frac{2-0+0+0}{4+0-0}=\frac{1}{2}.$$

Пояснение. Дроби, у которых числитель постоянен, а знаменатель является бесконечно большой величиной, по теореме 2.2 являются бесконечно малыми, то есть стремятся к нулю.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3-4x+9}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ = [получена основная неопределённость] =

= [находим старшие степени в числителе, знаменателе и выносим за скобку] =

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \cdot \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{9}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{x \cdot \left(2 - \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$ = [получена основная неопределённость] =

= [решаем квадратные уравнения: $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $3x^2 - 5x - 2 = 0$, находим их корни и разлагаем квадратные трёхчлены на множители, а затем используем теоремы 3.2 и 3.3] =

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2x+1)\cdot(x-2)}{(3x+1)\cdot(x-2)} = (\textit{сокращаем}) = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} (2\cdot x+1)}{\lim\limits_{x\to 2} (3\cdot x+1)} = \frac{5}{7}.$$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{\sqrt{3-x} - \sqrt{5+x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$ = [получена основная неопределённость] =

= [решаем квадратное уравнение: $2x^2 + 5x + 3 = 0$, находим его корни и разлагаем квадратный трёхчлен на множители] =

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{(2x+3)\cdot(x+1)}{\sqrt{3-x} - \sqrt{5+x}}$ = [домножим дробь на сопряжённое выражение] =

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(2x+3)\cdot(x+1)\cdot\left(\sqrt{3-x} + \sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x} - \sqrt{5+x}\right)\cdot\left(\sqrt{3-x} + \sqrt{5+x}\right)} = \textit{т. к. } (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(2x+3)\cdot(x+1)\cdot\left(\sqrt{3-x} + \sqrt{5+x}\right)}{3 - x - 5 - x} = \lim_{x\to -1} (2x+3)\cdot \lim_{x\to -1} \left(\sqrt{3-x} + \sqrt{5+x}\right)\cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{-2x-2} = 1\cdot\left(\sqrt{4} + \sqrt{4}\right)\cdot \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{-2\cdot(x+1)} = (\textit{сократим}) = 4\cdot\left(\frac{1}{-2}\right) = -2.$$

Пояснение. При решении этого примера использовались теоремы 3.2 и 3.3. Кроме того, использовалось следующее: $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{4}$, $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{5+x} = \sqrt{4}$. Докажем первое из этих равенств (второе – аналогично) с помощью замены ($x+1=z$) и таблицы эквивалентных бесконечно малых:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=(x+1=z,\ z\to 0,\ x=z-1,\ 3-x=4-z)=\lim_{z\to 0}\sqrt{4-z}=$$

$$=2\cdot\lim_{z\to 0}\sqrt{1-0{,}25z}=(-0{,}25z=u,\ u\to 0)=2\cdot\lim_{u\to 0}(1+u)^{0,5}=$$ [используем таблицу и эквивалентных бесконечно малых и определение 2.4] =

$$=2\cdot\left\{\left[\lim_{u\to 0}\left(\frac{(1+u)^{0,5}-1}{0{,}5u}\cdot 0{,}5u\right)+1\right]\right\}=2\cdot\lim_{u\to 0}(1\cdot 0{,}5u)+2=2\cdot 0{,}5\cdot 0+2=2=\sqrt{4}.$$

Замечание. Для доказательства того, что $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{4}$, $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{5+x}=\sqrt{4}$, можно использовать и непрерывность линейной и степенной функций (см. теорему 4.15).

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{tg(3x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ = [получена основная неопределённость с тригонометрическими функциями, поэтому используем таблицу эквивалентных бесконечно малых и определение 2.4: $\sin(2x)\sim 2x$, $tg(3x)\sim 3x$ при $x\to 0$] =

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{tg(3x)}\cdot\frac{2x}{3x}\right\}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(3x)}{x\cdot tg(2x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ = [получена основная неопределённость с тригонометрическими функциями, имеем: $1-\cos(3x)=2\sin^2(1{,}5x)$; далее используем таблицу эквивалентных бесконечно малых: $2\sin^2(1{,}5x)\sim 2(1{,}5x)^2=4{,}5x^2$, $tg(2x)\sim 2x$ при $x\to 0$, определение 2.4 и теоремы 3.2 и 3.3 о пределах] =

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\sin^2(1{,}5x)}{4{,}5x^2}\cdot\frac{2x}{tg(2x)}\cdot\frac{4{,}5x^2}{2x^2}\right\}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4{,}5x^2}{2x^2}=2{,}25.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}=\left\{1^{\infty}\right\}$ = [получена основная неопределённость типа второго замечательного предела, делаем замену: $1-3x=1+u$, $u\to 0$, $x=-\dfrac{u}{3}$, $\dfrac{2}{x}=-\dfrac{6}{u}$] =

$$=\lim_{u\to 0}\left(1+u\right)^{-\frac{6}{u}}=\lim_{u\to 0}\left(\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}\right)^{-6}=(z^{-6}=\frac{1}{z\,z\,z\,z\,z\,z})=$$

= [далее используем теорему 3.3 о пределе произведения и частного] =

$$=\left(\lim_{u\to 0}\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}\right)^{-6}=e^{-6}.$$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{2x}=\left\{1^{\infty}\right\}$ =[получена основная неопределённость типа второго замечательного предела, замена: $1-\dfrac{5}{x}=1+\dfrac{1}{z}$, $z\to\infty$, $x=-5z$, $2x=-10z$] =

$=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{-10z}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}\right)^{-10}$ = [далее используем теорему 3.3 о пределе произведения и частного] = $\left(\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}\right)^{-10}=e^{-10}.$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left[\ln(x+5)-\ln(x+1)\right]\right)=\left\{\infty\cdot(\infty-\infty)\right\}$ =[получена не основная неопределённость, сведём её к основной неопределённости; по свойствам логарифма: $x\cdot\left[\ln(x+5)-\ln(x+1)\right]=x\cdot\ln\dfrac{x+5}{x+1}=\ln\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x}=\ln\left(1+\dfrac{4}{x+1}\right)^{x}$] =

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{4}{x+1}\right)^{x}$ = [используем непрерывность логарифмической функции (теорема 4.15)] = $\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x+1}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}$ =

= [получена основная неопределённость типа второго замечательного предела, замена: $1+\dfrac{4}{x+1}=1+\dfrac{1}{z}$, $z\to\infty$, $x=4z-1$; используем теорему 3.3 о пределах произведения и частного] =

$$= \ln \lim_{z\to+\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z-1} = \ln\left[\lim_{z\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}\right] = \ln\left[e^{4}\cdot 1\right] = 4.$$

10) Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x\le 1;\\ x+1, & 1<x<3;\\ x^{2}-9, & x\ge 3.\end{cases}$$

Решение

Данная функция $y(x)$ является составной (неэлементарной). Она составлена из трёх функций:

$$f_1(x)=\frac{2}{x},\ x\le 1,\quad f_2(x)=x+1,\ 1<x<3,\quad f_3(x)=x^2-9,\ x\ge 3.$$

Сначала исследуем каждую из этих составляющих (все они являются элементарными функциями, поэтому по теореме 4.15 непрерывны на области своего определения) на непрерывность:

$f_1(x)=\dfrac{2}{x},\ x\le 1,$ – непрерывна при всех $x\ne 0$;

$f_2(x)=x+1,\ 1<x<3,$ – непрерывна при всех x;

$f_3(x)=x^2-9,\ x\ge 3,$ – непрерывна при всех x.

Следовательно, пока выявилась одна точка разрыва. Найдём односторонние пределы (используя теорему 2.2):

$$y(-0)=f_1(-0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{2}{x}=\frac{2}{-0}=-\infty,\quad y(+0)=f_1(+0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{2}{x}=\frac{2}{+0}=+\infty,$$

так как односторонние пределы бесконечны, то $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва второго рода.

Далее исследуем на непрерывность точки соединения различных составляющих функции $y(x)$, то есть $x = 1$ и $x = 3$:

$$y(1)=\left.\frac{2}{x}\right|_{x=1}=2,$$

$$y(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}y(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2}{x}=2,\quad y(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}y(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=2,$$

то есть выполняется критерий непрерывности: $y(1)=y(1-0)=y(1+0)$, поэтому в точке $x = 1$ функция $y(x)$ непрерывна. Затем: $y(3)=\left(x^2-9\right)\Big|_{x=3}=0,$

$$y(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} y(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (x+1)=4,\quad y(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} y(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x^2-9)=0,$$

то есть односторонние пределы существуют, но не равны между собой, поэтому точка $x = 3$ является точкой неустранимого разрыва первого рода.

Ответ: функция $y(x)$ непрерывна при всех x, кроме $x = 0$ и $x = 3$, причём точка $x = 0$ является точкой бесконечного разрыва второго рода, а точка $x = 3$ – точкой неустранимого разрыва первого рода.

11) Исследовать на непрерывность:

$$y=\frac{5}{4+3^{\frac{1}{x-2}}}.$$

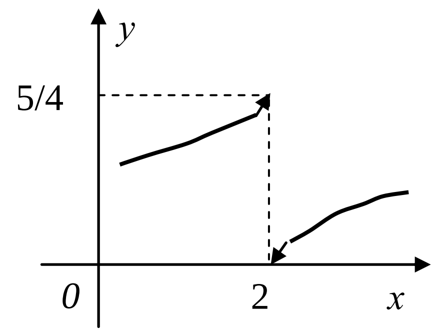


Рис. 4.7

Решение

Данная функция является элементарной, поэтому по теореме 4.15 она непрерывна при всех $x\neq 2$. Найдём односторонние пределы:

$$y(2-0)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{5}{4+3^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{5}{4+3^{\frac{1}{-0}}}=\frac{5}{4+3^{-\infty}}=\frac{5}{4+0}=\frac{5}{4},$$

Пояснения. При $x\to 2,\ x<2$ величина $(x-2)$ является отрицательной и бесконечно малой, поэтому по теореме 2.2 величина $\frac{1}{x-2}$ при $x\to 2,\ x<2$ будет являться отрицательной и бесконечно большой, тогда $3^{-\infty}=\frac{1}{3^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$. Аналогично: $y(2+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{5}{4+3^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{5}{4+3^{\frac{1}{+0}}}=\frac{5}{4+3^{+\infty}}=\frac{5}{4+\infty}=\frac{5}{+\infty}=0,$

то есть односторонние пределы существуют, но не равны между собой, поэтому точка $x = 2$ является точкой неустранимого разрыва первого рода (рис. 4.7).

Ответ: функция $y(x)$ непрерывна при всех $x\neq 2$, точка $x = 2$ является точкой неустранимого разрыва первого рода.

5. ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти предел $\lim\limits_{x \to a} (f(x)/g(x))^{\alpha(x)}$, без помощи правила Лопиталя. **Таблица 1.**

Задача 2. Задана функция: $y(x) = \begin{cases} g_1(x), \text{ если} : x \le a; \\ g_2(x), \text{ если} : a < x < b; \\ g_3(x), \text{ если} : x \ge b. \end{cases}$.

Найти точки разрыва функции, если они существуют, определить характер точек разрыва и сделать схематический чертёж. **Таблица 2.**

Таблица 1

№	$f(x)$	$g(x)$	$\alpha(x)$	a
1а	$2x^3 - 3x^2 + 1$	$7x^3 - 5x^2 + x$	1	∞
1б	$x^2 + x - 12$	$(5-x)^{1/2} - (x+13)^{1/2}$	1	-4
1в	$\sin^2(3x)$	$2x^2$	1	0
1г	$3 - x$	1	$x/(2-x)$	2
2а	$2x - x^2 + 5x^4$	$3x^4 - x + 2$	1	∞
2б	$(x+2)^{1/2} - (6-x)^{1/2}$	$x^2 - 3x + 2$	1	2
2в	$1 - \cos(2x)$	$3x^2$	1	0
2г	$\ln x - \ln(x-1)$	$(x+1)^{-1}$	1	$+\infty$
3а	$2x^7 - x^5 + x + 1$	$x^2 - x^4 + 3x^7$	1	∞
3б	$(x+10)^{1/2} - (8-x)^{1/2}$	$3x^2 + x - 2$	1	-1
3в	$\arcsin(3x)$	$2x$	1	0
3г	$2x - 5$	1	$2x/(x-3)$	3
4а	$11x^5 - x^3 + 3$	$2x + x^2 + 3x^5$	1	∞
4б	$(4+x)^{1/2} - (4-x)^{1/2}$	$x^2 + x$	1	0
4в	$1 - \cos(2x)$	$1 - \cos(3x)$	1	0
4г	$\ln(x+3) - \ln x$	$(x+3)^{-1}$	1	$+\infty$
5а	$3x^2 - 5x + 7$	$8 - 7x + 2x^2$	1	∞
5б	$x^2 - 5x + 6$	$(7-x)^{1/2} - (x+1)^{1/2}$	1	3
5в	$x \sin(2x)$	$1 - \cos(2x)$	1	0
5г	$1 + x$	1	$(2+x)/x$	0
6а	$8x^9 - x^7 - x^5 + 1$	$x^2 - x^4 + x^6 - x^9$	1	∞
6б	$8x^2 - 3x - 5$	$(3+x)^{1/2} - (5-x)^{1/2}$	1	1
6в	$x\,\mathrm{tg}x$	$1 - \cos(2x)$	1	0
6г	$\ln(x+9) - \ln(x+3)$	x^{-1}	1	$+\infty$

7а	$-2x^7 + x^5 + x + 1$	$x^2 + x^4 - 5x^7$	1	∞
7б	$(x+1)^{1/2} - (9-x)^{1/2}$	$3x^2 + x - 52$	1	4
7в	$\arcsin^2 (3x)$	$2x^3$	1	0
7г	$2x - 9$	1	$2x / (x-5)$	5
8а	$11x^3 - x^5 + 3$	$2x - x^2 + 3x^5$	1	∞
8б	$(4-x)^{1/2} - (4+x)^{1/2}$	$x^2 + x + x^{1/2}$	1	0
8в	$1 - \cos (2x)^2$	$1 - \cos^2 (3x)$	1	0
8г	$\ln (x+6) - \ln x$	$(x+3)^{-1}$	1	$+\infty$
9а	$3x^2 - 5x^4 + 7$	$8 - 7x^4 + 2x^2$	1	∞
9б	$2x^2 - 5x - 3$	$(7-x)^{1/2} - (x+1)^{1/2}$	1	3
9в	$x^2 \sin (2x)^2$	$(1 - \cos (2x))^2$	1	0
9г	$4 - x$	1	$(2+x) / (x-3)$	3
№	***f (x)***	***g (x)***	**α *(x)***	***a***
10а	$8x^5 + x^7 - x^9 + 1$	$x^2 + x^4 + x^6 - x^9$	1	∞
10б	$18x^2 - 3x - 15$	$(3+x)^{1/2} - (5-x)^{1/2}$	1	1
10в	$x \operatorname{tg} (x^3)$	$1 - \cos (2x)^2$	1	0
10г	$\ln (x+9) - \ln (x+1)$	x^{-1}	1	$+\infty$
11а	$6x^7 - x^5 - x + 1$	$x^2 - x^4 - 3x^7$	1	∞
11б	$(10-x)^{1/2} - (x+8)^{1/2}$	$3x^2 - x - 2$	1	1
11в	$\arcsin^2 (3x)$	$2x^2$	1	0
11г	$2x - 3$	1	$2x / (x-2)$	2
12а	$14x^5 - x^3 - 3$	$2x + x^2 - 3x^5$	1	∞
12б	$(3+x)^{1/2} - (3-x)^{1/2}$	$x^2 + x$	1	0
12в	$1 - \cos^2 (2x)$	$1 - \cos (3x)$	1	0
12г	$\ln (x+5) - \ln x$	$(x+3)^{-1}$	1	$+\infty$
13а	$13x^2 + 5x - 7$	$8 + 7x - 2x^2$	1	∞
13б	$x^2 + 5x + 6$	$(7-x)^{1/2} - (x+13)^{1/2}$	1	-3
13в	$x^{1/2} \sin^2 (2x)$	$1 - \cos (2x)$	1	0
13г	$7 - x$	1	$(2+x) / (x-6)$	6
14а	$6x^9 + x^7 - x^5 + 1$	$x^2 + x^4 - x^6 + x^9$	1	∞
14б	$8x^2 + 3x - 5$	$(3+x)^{1/2} - (1-x)^{1/2}$	1	-1
14в	$x^{1/2} \operatorname{tg}^2 x$	$1 - \cos^2 (2x)$	1	0
14г	$\ln (x+6) - \ln (x+3)$	x^{-1}	1	$+\infty$
15а	$8x^3 - x^2 + x^5$	$1 + 2x^2 - 3x^5$	1	∞
15б	$3x^2 + 5x - 22$	$(5+x)^{1/2} - (9-x)^{1/2}$	1	2
15в	$x^2 \arcsin (x^4)$	$\sin^2 (x)^3$	1	0
15г	$9 + x$	1	$x / (8+x)$	-8

16а **16б** **16в** **16г**	$2x^2 - 3x^4 + 11$ $9x - x^2 - 8$ $\sin (3x)^2$ $\ln (x+5) - \ln (x+1)$	$2 - 5x^4 - x^2$ $(3 - x)^{½} - (1+x)^{½}$ $1 - \cos (2x)$ x^{-1}	1 1 1 1	∞ 1 0 $+\infty$
17а **17б** **17в** **17г**	$11x^3 - x^2 + 3$ $9 - x^2$ $\arcsin^2 (3x)^2$ $4 + x$	$5x^4 + x^2 - x^3$ $(4+x)^{½} - (10-x)^{½}$ $x^3\, tg\, (2x)$ 1	1 1 1 $2x / (3+x)$	∞ 3 0 -3
18а **18б** **18в** **18г**	$8x^5 - 4x^3 + 2x^6$ $(x+3)^{½} - (5-x)^{½}$ $\cos^2 x - \cos^3 x$ $\ln (x+4) - \ln x$	$1 + x^2 + x^4 - x^5$ $2x^2 + 7x - 9$ $3x^2$ x^{-1}	1 1 1 1	∞ 1 0 $+\infty$
№	***f (x)***	***g (x)***	***α (x)***	***a***
19а **19б** **19в** **19г**	$8x^5 - 4x^3 + 2x^6$ $(x+5)^{½} - (9-x)^{½}$ $\cos x - \cos^2 x$ $\ln (x+4) - \ln x$	$1 + x^2 - x^4 - x^5$ $2x^2 - 7x + 6$ $3x^3$ x^{-1}	1 1 1 1	∞ 2 0 $+\infty$
20а **20б** **20в** **20г**	$8x^3 - x^2 + x$ $2x^2 - 5x + 2$ $x \arcsin x$ $9 - x$	$1+ 2x^2 - 3x^3$ $(2+x)^{½} - (6 - x)^{½}$ $\sin^2 x$ 1	1 1 1 $x / (8-x)$	∞ 2 0 8
21а **21б** **21в** **21г**	$2x^2 - 3x + 11$ $x^2 - 9x + 8$ $\sin^2 (3x)$ $\ln (x+5) - \ln (x+1)$	$2 - 5x - x^2$ $(3+x)^{½} - (5-x)^{½}$ $1 - \cos (2x)$ x^{-1}	1 1 1 1	∞ 1 0 $+\infty$
22а **22б** **22в** **22г**	$11x^3 - x^2 + 3$ $x^2 - 9$ $\arcsin^2 (3x)$ $4 - x$	$5x + x^2 - x^3$ $(1+x)^{½} - (7-x)^{½}$ $x\, tg\, (2x)$ 1	1 1 1 $2x / (3-x)$	∞ 3 0 3
23а **23б** **23в** **23г**	$8x^5 - 4x^3 + 2x$ $(x+3)^{½} - (5-x)^{½}$ $\cos x - \cos^3 x$ $\ln (x+1) - \ln x$	$1 + x^2 - x^4 - x^5$ $2x^2 - 7x + 5$ $3x^2$ x^{-1}	1 1 1 1	∞ 1 0 $+\infty$
24а **24б** **24в** **24г**	$6x^7 - x^5 - x^{12} + 1$ $(10-x^2)^{½} - (8+x^2)^{½}$ $\arcsin^2 (3x)$ $2x - 3$	$x^{12} - x^4 - 3x^7$ $3x^2 + x - 4$ $2x^2 + x$ 1	1 1 1 $2x^2 / (2-x)$	∞ 1 0 2
25а **25б**	$14x^5 - x^9 - 3$ $(9+x)^{½} - (9-x)^{½}$	$2x + x^9 - 3x^5$ $2x^2 + x + x^3$	1 1	∞ 0

25в	$1 - \cos^2 (2x)$	$1 - \cos^3 (3x)$	1	0
25г	$\ln (x+9) - \ln x$	$(x+5)^{-1}$	1	$+\infty$
26а	$13x^2 + 5x^4 - 7$	$8 + 7x^4 - 2x^2$	1	∞
26б	$2x^2 + 5x - 3$	$(7-x)^{1/2} - (x+13)^{1/2}$	1	-3
26в	$x^{1/3} \sin^2 (2x)$	$1 - \cos (2x)^2$	1	0
26г	$7 - x$	1	$(2+ x^2) / (x - 6)$	6
27а	$15 - x^5 + x^7 - 6x^9$	$x^2 + x^4 - x^6 + x^9$	1	∞
27б	$18x^2 + 3x^3$	$(3+x^2)^{1/2} - (3-x^2)^{1/2}$	1	0
27в	$x^{1/4} \operatorname{tg}^2 (x^3)$	$1 - \cos^2 (2x)$	1	0
27г	$\ln (x+ 6) - \ln (x+3)$	x^{-2}	1	$+\infty$
№	***f (x)***	***g (x)***	$\boldsymbol{\alpha (x)}$	***a***
28а	$x + 8x^2 - x^3$	$1 - 2x^2 - 3x^3$	1	∞
28б	$2x^2 + 5x - 18$	$(2 + x)^{1/2} - (6 - x)^{1/2}$	1	2
28в	$x \arcsin (x^3)$	$\sin^2 (x^2)$	1	0
28г	$4 - x$	1	$x / (3-x)$	3
29а	$2x^2 + 11 - 3x^4$	$2 + 5x^4 - x^2$	1	∞
29б	$x^2 + 7x - 8$	$(3 - x)^{1/2} - (1 + x)^{1/2}$	1	1
29в	$\sin^2 (3x)^3$	$1 - \cos (2x)^2$	1	0
29г	$\ln (x+3) - \ln (x+1)$	x^{-1}	1	$+\infty$
30а	$3 + 11x^3 - x^4$	$5x^4 + x^2 - x^3$	1	∞
30б	$9 - x^2$	$(13-x)^{1/2} - (7+x)^{1/2}$	1	3
30в	$\arcsin^2 (3x)^3$	$x^{1/2} \operatorname{tg} (2x)^2$	1	0
30г	$4 + x$	1	$2x / (3+x)$	-3

Таблица 2

№	$g_1 (x)$	$g_2 (x)$	$g_3 (x)$	a	b
1	$-x^2 + 1$	$2x - 1$	$x + 2$	1	3
2	$x + 3$	$-x + 3$	$3 + \sqrt{x}$	0	4
3	$x^2 + 1$	$2x$	$x + 2$	1	3
4	$x - 3$	$x + 1$	$3 + \sqrt{x}$	0	4
5	$2x^2$	x	2	0	1
6	$x - 1$	x^2	$2x$	0	2
7	$(1 - x^2)^{1/3}$	1	$x - 2$	0	2
8	$\cos x$	$1 - x$	x^2	0	2
9	$\sin x$	x	0	0	2
10	x	$\sin x$	2	0	$\pi /2$
11	0	$\operatorname{tg} x$	x	0	$\pi /2$
12	$\cos x$	0	$\pi /2$	$\pi /2$	π

13	$2x^2$	$\sqrt{x}$	2^x	0	1
14	$2x + 1$	$x^2 + 1$	$2x$	0	2
15	$(1 + x^2)^{1/3}$	1	$-x + 2$	0	2
16	$\cos x$	$1 + x$	$-x^2$	0	2
17	$\sin x$	$\sqrt{x}$	0	0	2
18	$2x$	$3 \sin x$	2	0	$\pi/2$
19	0	$2\, \mathrm{tg}\, x$	$x^2 - \pi$	0	$\pi/2$
20	$3 \cos x$	0	$-\pi/2$	$\pi/2$	π
21	$2x^2 - 1$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x - 1$	0	π
22	$\sin(2x)$	x	1	0	$\pi/2$
23	$2x^2$	x^3	2	0	1
24	$x + 1$	$x^2 - 1$	$7 - 2x$	0	2
25	$(1 + x^2)^{1/3}$	-1	$x - 3$	0	2
26	$\cos x$	$1 + x$	$-x^2$	0	2
27	$\sin x$	x^2	$0{,}5$	0	2
28	x^3	$\sin x$	2	$0{,}5$	$\pi/2$
29	0	$\mathrm{tg}\, x$	$x - \pi$	0	$\pi/2$
30	$\cos x^2$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	π
№	$\boldsymbol{g_1(x)}$	$\boldsymbol{g_2(x)}$	$\boldsymbol{g_3(x)}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Определение предела функции на бесконечности и в точке.
2. Что такое бесконечно большие и бесконечно малые? Каковы свойства бесконечно малых?
3. Основная теорема о пределах (о связи предела, функции и бесконечно малой).
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах (предел суммы, разности, произведения и частного).
5. Что такое: основные и неосновные неопределённости. План раскрытия неопределённостей.
6. Первый и второй замечательные пределы, их применение для раскрытия неопределённостей.
7. Непрерывность функции, критерий непрерывности.
8. Точки разрыва функции и их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынов, Г.П. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2014. – 1,61 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
2. Мартынов, Г.П. Рабочая программа дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методический документ / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 18 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 04.07.2016, серия А № 001511/2016 / www.informio.ru.
3. Мартынов, Г.П. «Фонд оценочных средств дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 14 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 15.11.2016, серия А № 002150/2016 / www.informio.ru.
4. Мартынов, Г.П. Организация самостоятельной работы студентов направления подготовки «Картография и геоинформатика» при изучении дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 7 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 26.07.2016, серия А № 001637/2016 / www.informio.ru.
5. Мартынов, Г.П. Математика для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебное пособие. Ч. 1. / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 2,63 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
6. Мартынов, Г.П. Математика для картографов и экологов [Текст]: учебное пособие. В 4-х ч. Ч. 1 / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 192 с.
7. Вербная, В.П. Математика для дистанционного обучения: учебное пособие, издание 2-ое, стереотипное (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 278 с.
8. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
9. Мартынов, Г.П. Векторная алгебра в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2017 – 39 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 11.01.2017, серия А № 000031/2017 / www.informio.ru.